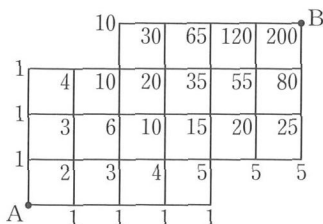


総合問題

1 ※問題文は、教科書 170 ページを参照。

指針 最短の道順の総数 (1)では、Aから↑か→のどちらか一方だけで行ける交差点には、すべて1を書き入れ、他の交差点では(*)を使う。(2)は、それぞれの道順の総数を、同じものを含む順列で表し、(*)を使う。

解答 (1)



最短の道順
の総数は
200 **答**

教科書 39 ページを
見直してみよう。



(2) Pまでの道順の総数は ${}_4C_3$ 通り

Qまでの道順の総数は ${}_4C_2$ 通り

Rまでの道順の総数は ${}_5C_3$ 通り

よって、(*)より ${}_5C_3 = {}_4C_2 + {}_4C_3$ **終**

← ↑2個と→3個の順列

2 ※問題文は、教科書 170 ページを参照。

指針 確率の計算 (2)は余事象の確率、(3)は互いに排反な2つの事象の和事象の確率を求める。

解答 (1) $\frac{3}{5}$ **答**

← 表の晴と晴が交わる欄

(2) 明日、明後日の少なくとも一方は雨でないという事象は、明日、明後日ともに雨であるという事象の余事象である。

今日の天気は晴れであるから、求める確率は

$$1 - \frac{1}{10} \times \frac{3}{10} = 1 - \frac{3}{100} = \frac{97}{100} \quad \text{答} \quad \leftarrow \text{晴} \rightarrow \text{雨} : \frac{1}{10}, \text{雨} \rightarrow \text{雨} : \frac{3}{10}$$

(3) 明日、明後日の2日間雨でない事象は、次の2つの事象の和事象である。

[1] 今日晴れで、明日は晴れ、明後日は晴れか曇りである場合

$$\text{確率は } \frac{3}{5} \times \left(\frac{3}{5} + \frac{3}{10} \right) = \frac{27}{50} \quad \leftarrow \text{晴} \rightarrow \text{晴} : \frac{3}{5}, \text{晴} \rightarrow \text{曇} : \frac{3}{10}$$

[2] 今日晴れで、明日は曇り、明後日は晴れか曇りである場合

$$\text{確率は } \frac{3}{10} \times \left(\frac{3}{10} + \frac{2}{5} \right) = \frac{21}{100} \quad \leftarrow \text{曇} \rightarrow \text{晴} : \frac{3}{10}, \text{曇} \rightarrow \text{曇} : \frac{2}{5}$$

[1], [2]は互いに排反であるから、求める確率は

$$\frac{27}{50} + \frac{21}{100} = \frac{75}{100} = \frac{3}{4} \quad \text{答}$$

3 ※問題文は、教科書 171 ページを参照。

指針 作図，線分の比に関する定理 作図の説明には平行線と線分の比を使い，線分の比 $BL : LC$ ， $LF : FA$ を求めるときは，チェバの定理，メネラウスの定理を用いる。

解答 (1) ③ R を通り辺 AB に垂直な直線と，

P を通り辺 AB に平行な直線との
交点を S とする。

④ 点 A と点 S を通る直線と辺 OB
の交点を S' とする。

⑤ S' から辺 AB に垂線 S'R' を下ろす。

また，S' を通り辺 AB に平行な直
線と辺 OA の交点を P' とする。

⑥ P' から辺 AB に垂線 P'Q' を下ろす。

四角形 P'Q'R'S' が求める正方形である。

四角形 P'Q'R'S' は長方形であるから， $S'R' = P'S'$ を示す。

$SR \parallel S'R'$ より $AS : AS' = SR : S'R'$

$PS \parallel P'S'$ より $AS : AS' = PS : P'S'$

ゆえに $SR : S'R' = PS : P'S' \cdots (*)$

四角形 PQRS は正方形であるから $SR = PS$

これと (*) から $SR : S'R' = SR : P'S'$

よって， $SR \cdot P'S' = S'R' \cdot SR$ であるから

$$P'S' = S'R'$$

ゆえに，四角形 P'Q'R'S' は正方形である。

点 P' は辺 OA 上，点 S' は辺 OB 上，2 点 Q', R' は辺 AB 上にある。

よって，四角形 P'Q'R'S' は $\triangle OAB$ に内接する正方形である。 **終**

(2) チェバの定理より $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AD}{DB} = 1 \cdots \cdots ①$

また， $DE \parallel BC$ より $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \cdots \cdots ②$

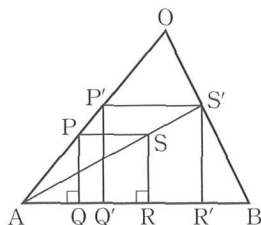
①，②から $\frac{BL}{LC} = 1$ よって $BL : LC = 1 : 1$ **答**

(3) 正方形 DMNE の面積 x^2 **答**

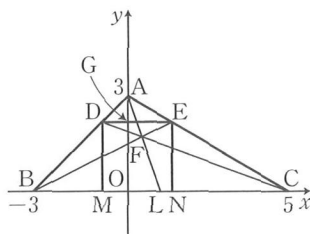
$$\triangle BDM = \frac{1}{2}x^2 \quad \text{答}$$

$$\triangle ADE = \frac{1}{2}x(3-x) \quad \text{答}$$

$$\triangle CEN = x(4-x) \quad \text{答} \quad \leftarrow NC = BC - BN = 8 - 2x$$



総合問題



別解 $\triangle ADE = \frac{3}{16}x^2$, $\triangle CEN = \frac{5}{6}x^2$

$\leftarrow \triangle ABC \sim \triangle ADE$

$\leftarrow \triangle CAO \sim \triangle CEN$

(4) $\triangle ABC$ の面積について

$$x^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x(3-x) + x(4-x) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 \quad \text{よって, } x = \frac{24}{11} \quad \text{答}$$

(5) $\triangle ABL$ と直線 CD にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{BC}{CL} \cdot \frac{LF}{FA} \cdot \frac{AD}{DB} = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

(2)より, $BC : CL = 2 : 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$

$$DE \parallel BC \text{ から } AD : AB = DE : BC = \frac{24}{11} : 8 = 3 : 11$$

よって $AD : DB = 3 : 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4}, \textcircled{5} \text{ から } \frac{2}{1} \cdot \frac{LF}{FA} \cdot \frac{3}{8} = 1 \quad \text{ゆえに } \frac{LF}{FA} = \frac{4}{3}$$

よって $LF : FA = 4 : 3 \quad \text{答}$

4 ※問題文は、教科書 172 ページを参照。

指針 自然数の積と素因数の個数 (1)②では, 2^2 の倍数 ($< 2^3$) には素因数 2 が 2 個あるが, そのうちの 1 個はすでに 2 の倍数として数えられていることに注意する。 2^3 , 2^4 の倍数でも同様。(2)では, $10 = 2 \cdot 5$ より, 素因数 2 と 5 の 1 組で末尾に 0 が 1 個並ぶ。素因数 2, 5 の個数に注意する。

解答 (1) ① $2, 2^2, 2^3, 2^4$ の倍数の個数は, 20 をそれぞれの数で割ったときの商に等しい。

求める個数はそれぞれ 10 個, 5 個, 2 個, 1 個 答

② $10 + 5 + 2 + 1 = 18$ (個) 答

③ $3, 3^2, 5, 7$ の倍数の個数は, それぞれ 6, 2, 4, 2 (個)

素因数 3, 5, 7 の個数はそれぞれ, $6 + 2 = 8, 4, 2$ (個)

以上より ア $\cdots \cdots 18$, イ $\cdots \cdots 8$, ウ $\cdots \cdots 4$, エ $\cdots \cdots 2$ 答

(2) $10 = 2 \cdot 5$ であり, 素因数 2, 5 の個数を比べると, $18 > 4$

よって, 末尾に連続して並ぶ 0 の個数は 4 個 答

(3) 2 進法で表すと, 素因数分解したときの素因数 2 の数の分だけ, 連続して 0 が並ぶ。よって, その個数は 18 個 答

5 ※問題文は、教科書 172 ページを参照。

指針 1 次不定方程式の解 求める年を西暦 N 年とすると, x, y, z を整数として, $N = 3x + 1, N = 5y + 2, N = 7z + 3$ と表される。2 つを組み合わせた 2 組の不定方程式を解いて, 条件に合う N の値を求める。

解答 求める年を西暦 N 年とすると、 N は0以上の整数 x, y, z を用いて次のように表される。

$$N=3x+1, N=5y+2, N=7z+3$$

$$\text{よって} \quad 3x+1=5y+2=7z+3$$

$$3x+1=5y+2 \text{ から} \quad 3x-5y=1 \quad \cdots\cdots\textcircled{1}$$

$x=2, y=1$ は、 $\textcircled{1}$ の整数解の1つである。

$$\text{よって} \quad 3 \cdot 2 - 5 \cdot 1 = 1 \quad \cdots\cdots\textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}-\textcircled{2} \text{ から} \quad 3(x-2)-5(y-1)=0$$

$$\text{すなわち} \quad 3(x-2)=5(y-1)$$

3と5は互いに素であるから、 $x-2$ は5の倍数である。

よって、 k を整数として、 $x-2=5k$ と表される。

$$\text{ゆえに} \quad x=5k+2$$

$$\text{したがって} \quad N=3x+1=3(5k+2)+1=15k+7$$

$$15k+7=7z+3 \text{ から} \quad 15k-7z=-4 \quad \cdots\cdots\textcircled{3}$$

$\textcircled{3}$ の右辺を1とした方程式 $15k-7z=1$ について、 $k=1, z=2$ はその整数解の1つである。

$$\text{よって} \quad 15 \cdot 1 - 7 \cdot 2 = 1$$

$$\text{両辺に} -4 \text{ を掛けて} \quad 15 \cdot (-4) - 7 \cdot (-8) = -4 \quad \cdots\cdots\textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}-\textcircled{4} \text{ から} \quad 15(k+4)-7(z+8)=0$$

$$\text{すなわち} \quad 15(k+4)=7(z+8)$$

15と7は互いに素であるから、 $k+4$ は7の倍数である。

よって、 ℓ を整数として、 $k+4=7\ell$ と表される。

$$\text{ゆえに} \quad k=7\ell-4$$

$$\text{したがって} \quad N=15k+7=15(7\ell-4)+7=105\ell-53$$

$$2001 \leq N \leq 2100 \text{ より} \quad 2001 \leq 105\ell-53 \leq 2100$$

$$\text{これを満たす整数} \ell \text{ は} \quad \ell=20$$

$$\text{したがって、求める年数は} \quad N=105 \cdot 20 - 53 = 2047$$

答 2047年

6 ※問題文は、教科書172ページを参照。

指針 ゲームの必勝法 このゲームでは、自分がある自然数 a を言ったとき、相手が次に言う自然数の個数に対応して、続いて必ず $a+4$ を言うことができる。また、最後の数 n を相手に言わせ、勝つには、自分は $n-1$ を言えればよい。すなわち、 $\cdots, n-9, n-5, n-1$ を言える人は必ず勝てる。

解答 (1) 数「17」を言えば勝ちとなる。

数「13」を言えば、相手が言える数は「14」
または「14 15」または「14 15 16」で
あるから、自分は必ず「17」を言える。

同様に、「13」を言うには「9」を、「9」

を言うには「5」を、「5」を言うには「1」を言う必要がある。

逆に、「1」を言えば、その後は相手が言った数の個数に応じて自分が言う数の個数を変えることで、「5」「9」「13」「17」を必ず言うことができる。

数「1」を言えるのは先手であるから、 $n=18$ のとき、このゲームは先手必勝である。

○：自分 ●：相手

13	14	15	16	17	18
○	●	○	○	○	●
○	●	●	○	○	●
○	●	●	●	○	●

答 (ア) 先手必勝

(2) 次の4つの場合に分けて考える。

[1] $n=4k$ ($k=1, 2, 3, \dots$) のとき

(1)と同様に考えると、最初に「1 2 3」と言えば、数「 $4k-1$ 」を必ず言うことができる。

よって、先手必勝である。

[2] $n=4k+1$ ($k=0, 1, 2, \dots$) のとき

$k=0$ すなわち $n=1$ のとき、先手が必ず負ける。

$k \geq 1$ のとき、数「 $4k$ 」を言えば勝ちとなる。

(1)と同様に考えると、数「 $4k$ 」を言うには数「4」を言う必要がある。

後手のとき、数「4」を必ず言うことができる。

以上から、後手必勝である。

[3] $n=4k+2$ ($k=0, 1, 2, \dots$) のとき

(1)と同様に考えると、最初に「1」と言えば、数「 $4k+1$ 」を必ず言うことができる。

よって、先手必勝である。

[4] $n=4k+3$ ($k=0, 1, 2, \dots$) のとき

(1)と同様に考えると、最初に「1 2」と言えば、数「 $4k+2$ 」を必ず言うことができる。

よって、先手必勝である。終